4 亂點鴛鴦譜…圓圈數

每個人都有兩隻手，在亂點鴛鴦譜的活動中，每人的每一隻手都恰與另一隻手（可以是自己的另一隻手或他人的手）握住。這時所有人的手交錯揪成一團，但是仔細辨識，還是可以區分哪幾個人是相連在一塊的，這些相連在一塊的人剛好圍成一個圓圈。最小的圓圈就是自己的兩隻手握在一起，再來就是兩個人的兩隻手互相握在一起，形成兩個人的圓圈，…。

如果只有三個人，那麼圍出的圓圈數之期望值是多少呢？

這道問題也可以抽象為：隨手取出 n 條線直線，共計有 $2n$ 個端點，首先將兩個端點綁在一塊，再將另兩個端點綁在一塊，如此進行下去，把最後的兩個端點也綁在一塊。此時，這 n 條線直線會圍成數個圓圈，令 E_n 代表所結圓圈數的期望值。

(1) 求 E_1 的值。

(2) 證明 E_n 滿足遞迴關係

$$E_n = E_{n-1} + \frac{1}{2n-1}.$$

(3) 求 E_2, E_3, E_4 的值。

我們分析如下：

(1) 當 1 條繩子時，剛好圍成一個圓圈，即 $E_1 = 1$。

(2) 在 n 條繩子的情況：

① 第一次選取的兩點剛好是同一條繩子的端點之機率為

$$\frac{n}{C_2^{2n}}=\frac{n}{\frac{(2n)(2n-1)}{2}}=\frac{1}{2n-1},$$

此時所圍成的圓圈數為 $1+E_{n-1}$。

② 第一次選取的兩點剛好是不同條繩子的端點之機率為

$$1-\frac{1}{2n-1}=\frac{2n-2}{2n-1},$$

此時所圍成的圓圈數為 E_{n-1}。

綜合①與②，我們有

$$E_n=\frac{1}{2n-1}\times(1+E_{n-1})+\frac{2n-2}{2n-1}\times E_{n-1}=E_{n-1}+\frac{1}{2n-1}.$$

(3) 利用 $E_1=1$ 及遞迴關係

$$E_n=E_{n-1}+\frac{1}{2n-1},$$

我們得

$$E_2=E_1+\frac{1}{2\cdot 2-1}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3};$$
$$E_3=E_2+\frac{1}{2\cdot 3-1}=\frac{4}{3}+\frac{1}{5}=\frac{23}{15};$$
$$E_4=E_3+\frac{1}{2\cdot 4-1}=\frac{23}{15}+\frac{1}{7}=\frac{176}{105}.$$